Série d'exercices n°11

Solution de l'exercice 1

1. L'efficacité totale du système est donné par

$$\eta = \left|\frac{W_1 + W_2}{Q_{h_1}}\right| = \frac{-W_1 - W_2}{Q_{h_1}}$$

puisque nous pouvons tirer de l'énergie mécanique des deux moteurs, dont les efficacités sont les suivantes :

$$\eta_1 = \left|\frac{W_1}{Q_{h_1}}\right| = \frac{-W_1}{Q_{h_1}} \qquad \eta_2 = \left|\frac{W_2}{Q_{h_2}}\right| = \frac{-W_2}{Q_{h_2}}.$$

De plus on a $Q_{h_2} = -Q_{b_1} > 0$ car le premier moteur fournie l'énergie thermique au second. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 - \frac{W_2}{Q_{h_1}} \\ &= \eta_1 - \frac{W_2}{Q_{h_2}}\frac{Q_{h_2}}{Q_{h_1}} \\ &= \eta_1 + \eta_2\frac{Q_{h_2}}{Q_{h_1}}\end{aligned}$$

Or, sur le cycle du premier moteur, la variation de l'énergie interne est donnée par

$$\Delta U_1 = W_1 + Q_{h_1} + Q_{b_1} = 0 \Rightarrow Q_{h_2} = -Q_{b_1} = W_1 + Q_{h_1}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2\frac{W_1 + Q_{h_1}}{Q_{h_1}} \\ &= \eta_1 + \eta_2\left(1 + \frac{W_1}{Q_{h_1}}\right) \\ &= \eta_1 + \eta_2\left(1 - \eta_1\right)\end{aligned}$$

et donc, finalement

$$\boxed{\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}$$

2. L'efficacité d'une machine de Carnot type moteur est donnée par

$$\eta = 1 - \frac{T_b}{T_h}$$

Ainsi,

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_i}{T_h} \qquad \eta_2 = 1 - \frac{T_b}{T_i}$$

et donc

$$\eta = 1 - \frac{T_i}{T_h} + 1 - \frac{T_b}{T_i} - \left[\left(1 - \frac{T_i}{T_h}\right)\left(1 - \frac{T_b}{T_i}\right)\right]$$

$$\eta = 1 - \frac{T_i}{T_h} + 1 - \frac{T_b}{T_i} - \left[1 - \frac{T_i}{T_h} - \frac{T_b}{T_i} + \frac{T_b}{T_h}\right]$$
$$\eta = 1 - \frac{T_b}{T_h}$$

On retombe sur l'efficacité d'une machine de Carnot.

3. Non, et c'est logique, puisqu'il s'agit d'une machine idéale (Carnot), avec une efficacité maximum.
4. On cherche T_i tel que $W_1 = W_2$. On utilise alors la relation $\eta = \frac{-W}{Q_h}$:

$$W_1 = W_2$$
$$\eta_1 Q_{h_1} = \eta_2 Q_{h_2}$$
$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_{h_2}}{Q_{h_1}}$$

et on a vu au point 1 de cet exercice que $\frac{Q_{h_2}}{Q_{h_1}} = 1 - \eta_1$. Ainsi, $\eta_1 = \eta_2(1-\eta_1)$. En replaçant η_1 et η_2 par leurs expressions respectives en fonction de T_h, T_i et T_b, on tombe sur
$$1 - \frac{T_i}{T_h} = \left(1 - \frac{T_b}{T_i}\right)\frac{T_i}{T_h}.$$
La température permettant l'égalité des travaux fournis par chacune des machines de Carnot est donc $T_i = \frac{T_h+T_b}{2}$.

5. On veut T_i tel que $\eta_1 = \eta_2$. Il vient alors :

$$1 - \frac{T_i}{T_h} = 1 - \frac{T_b}{T_i}$$
$$T_i^2 = T_h T_b$$

Il faut donc $T_i = \sqrt{T_h T_b}$.

Solution de l'exercice 2

1. Pour un cycle : Premier principe : la variation d'énergie interne, U est nulle : $\Delta U = Q_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f} + W = 0$ avec un signe positif pour des quantités entrantes dans la machine thermique et négatif pour les quantités sortantes. Second principe : la variation d'entropie, S est nulle : $\Delta S = Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f}/T_\mathrm{f} + S_\mathrm{int} = 0$ avec $S_\mathrm{int} \geq 0$.
2. Machine 1 : Possible, ce serait le cas d'une machine pas très utile qui génère de la chaleur par frottements et s'échauffe à des températures $> T_\mathrm{c}$, la chaleur engendrée réchaufferait à la fois la source chaude et la source froide.
Machine 2 : Possible, c'est le cas de la pompe à chaleur ou du réfrigérateur.
Machine 3 : Impossible, incompatible avec le premier principe, on aurait :
$$\Delta U = Q_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f} + W < 0$$
Machine 4 : Impossible. Ce cas est le plus délicat à traiter : on peut soit remarquer que cette machine violerait l'interdit de Clausius ou bien le démontrer analytiquement. Dans le second cas, il faut partir du fait que l'on a $Q_\mathrm{c} < 0$, $Q_\mathrm{f} > 0$ et $W < 0$. A priori il semble possible d'avoir $Q_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f} + W = 0$ et $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f}/T_\mathrm{f} + S_\mathrm{int} = 0$, en fait il n'en est rien. Pour le constater, il faut utiliser un raisonnement par l'absurde. Si $Q_\mathrm{c}/T_\mathrm{c} + Q_\mathrm{f}/T_\mathrm{f} + S_\mathrm{int} = 0$, alors $0 < -Q_\mathrm{c} = T_\mathrm{c}/T_\mathrm{f} Q_\mathrm{f} + T_\mathrm{c} S_{int}$. Or, $T_\mathrm{c}/T_\mathrm{f} > 1$ et $S_\mathrm{int} > 0$, donc $-Q_\mathrm{c} > Q_\mathrm{f}$, c'est-à-dire $-Q_\mathrm{c} - Q_\mathrm{f} > 0$. Du premier principe on en

déduit $W = -Q_c - Q_f > 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ ($W < 0$).
Machine 5 : Extraire de la chaleur de la source chaude et de la source froide pour fournir un travail extérieur est impossible, cela violerait le second principe de la thermodynamique.
Machine 6 : Extraire de la chaleur de la source chaude et de la source froide en fournissant un travail de l'extérieur est impossible car cela impliquerait une disparition de l'énergie ce qui contredit le premier principe de la thermodynamique.
Machine 7 : Extraire de la chaleur de la source chaude et en fournir à la source froide en fournissant un travail à l'extérieur est possible : il s'agit d'un moteur thermique.
Machine 8 : Extraire de la chaleur de la source chaude et en fournir à la source froide en recevant un travail de l'extérieur est possible : il s'agit d'un chauffage. Le travail va augmenter le transfert « naturel » de chaleur de la source chaude à la source froide.

3. Une transformation est irréversible s'il y a production d'entropie interne ($S_{\text{int}} > 0$). La machine 1 ne peut exister que de manière irréversible, le travail est irréversiblement transformée en chaleur, en effet : $Q_c < 0$, et $Q_f < 0$ donc $Q_c/T_c + Q_f/T_f < 0$ et $\Delta S = Q_c/T_c + Q_f/T_f + S_{\text{int}} = 0$ ne peut être satisfaite que si $S_{\text{int}} > 0$.
La machine 8 est également irréversible : il suffit de remarquer qu'en la faisant fonctionner au contraire on aurait la machine 4, qu'on a montré être impossible.
Remarque : De la même manière, on pourrait dire que la machine 1 est l'inverse de la machine 5.

Solution de l'exercice 3

1. $\Delta U = Q + W$ Adiabatique $Q = 0$ $\Delta U = W$
GP $\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$
2. Le gaz reçoit $p_1\Delta V_1$ du côté avant $p_2\Delta V_2$ et W_{fonc} entre.

$$W = -p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2 + W_{\text{fonc}} = p_1V_1 - p_2V_2 + W_{\text{fonc}}$$
$$\Delta H = \Delta U + p_2V_2 - p_1V_1 = W + p_2V_2 - p_1V_1 = W_{\text{fonc}}$$

G.P. $\Delta H = mc_p(T_2 - T_1)$
3. Avec E_c et E_p

$$\Delta E = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_p} + \Delta U = Q + W$$
$$\Delta U = Q + W - \Delta E_c$$

Puisque :
$$W = p_1V_1 - p_2V_2 + W_{\text{fonc}},$$
on a :
$$\Delta U + p_2V_2 - p_1V_1 = Q + W_{\text{fonc}} - \Delta E_c,$$
donc :
$$\Delta H + \Delta E_c = Q + W_{\text{fonc}}$$
4. Adiabatique réversible $p_eV_e^\gamma = p_sV_s^\gamma$ ou $p_e^{1-\gamma}T_e^\gamma = p_s^{1-\gamma}T_s^\gamma$

$$T_s = T_e\left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

5.
$$\Delta E_c + \Delta H = Q + W_{\text{fonc}} = 0 + 0$$
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m\omega_s^2 - \frac{1}{2}m\omega_e^2 = -\Delta H = -mc_p(T_s - T_e)$$
$$\omega_s = \sqrt{\omega_e^2 - 2c_pT_e\left[\left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]}$$

6. On s'attend à ce que ce modèle ne soit probablement plus valide à des vitesses d'éjection se rapprochant de la vitesse du son.
7. $F = D\omega_s$.
8.

	1	2	3	e	s
P	P_1	αP_1	αP_1	$\alpha P_1 \left(\frac{T_1+Q_2/mc_p}{T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+Q_2/mc_p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	P_1
T	T_1	$T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$	$T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{Q_2}{mc_p}$	$T_1 + \frac{Q_2}{mc_p}$	$T_1 + \frac{Q_2}{mc_p}\alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Pour remplir le tableau :

— $1 \to 2$ est adiabatique, donc : $P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}$, donc $T_2 = T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

— $2 \to 3$ est isobare, donc $P_3 = P_2 = \alpha P_1$. En utilisant le premier principe pour l'enthalpie : $\Delta H = Q_2 = mc_p(T_3 - T_2) \implies T_3 = T_2 + \frac{Q_2}{mc_p}$

— $3 \to e$ adiabatique, donc $P_e = P_3(T_e/T_3)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. L'intégralité du travail extrait dans la turbine sert à alimenter le compresseur, donc :

$$\begin{aligned}
W'_{\text{fonc}} &= -W_{\text{fonc}} \\
\Delta H_{3e} &= -\Delta H_{12} \\
mc_p(T_e - T_3) &= -mc_p(T_2 - T_1) \\
T_e &= T_2 + T_3 - T_1 \\
&= T_1 + \frac{Q_2}{mc_p}
\end{aligned}$$

— Puisque la tuyère est rigide et que la transformation est adiabatique : $\Delta H + \Delta E_c = 0$. Comme le gaz se retrouve à l'extérieur, il est à la pression atmosphérique, donc $P_s = P_1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
T_s &= T_e\left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
&= \frac{\cancel{(T_1 + Q_2/mc_p)}\cancel{P_1^{(\gamma-1)/\gamma}}}{(\alpha \cancel{P_1})^{(\gamma-1)/\gamma}\left(\frac{\cancel{T_1+Q_2/mc_p}}{T_1\alpha^{(\gamma-1)/\gamma}+Q_2/mc_p}\right)} \\
&= \alpha^{(1-\gamma)/\gamma}\left(T_1\alpha^{(\gamma-1)/\gamma} + Q_2/mc_p\right) \\
&= T_1 + \frac{Q_2}{mc_p}\alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}
\end{aligned}$$

9.

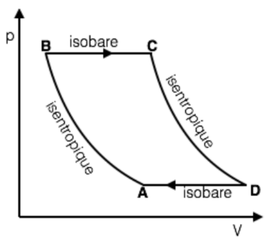
	$1 \to 2$	$2\to$	$3\to$e	e$\to$s
W_{fonc}	$mc_pT_1(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1)$	0	$-mc_pT_1(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1)$	0
Q	0	Q_2	0	0

Pour calculer le travail, on utilise :

$$\begin{aligned} W_{\text{fonc}} &= \Delta H_{12} \\ &= mc_p(T_2 - T1) \\ &= mc_pT_1\left(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) \end{aligned}$$

10. Ce qui nous intéresse est d'avoir le plus de vitesse en sortie de la tuyère, la grandeur correspondante est donc ΔE_c. Puisque le travail du compresseur est compensée parfaitement par celui de la turbine, la seule grandeur en entrée est la chaleur Q_2. On a donc :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Delta E_c}{Q_2} \\ &= \frac{-\Delta H_{es}}{Q_2} \\ &= \frac{T_e - T_s}{Q_2/mc_p} \\ &= \frac{T_1 + Q_2/mc_p - T_1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma}Q_2/mc_p}{Q_2/mc_p} \\ &= 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

11. 

12. C'est un cycle de Joule ou de Brayton.